Zwanglaufbewegungen mit Böschungslinien als Punktbahnen

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 35, 1983, S.65-73

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Zwanglaufbewegungen mit Böschungslinien als Punktbahnen

Von **Hans Robert Müller,** Braunschweig

(eingegangen am 11.5.1983)

Einparametrige Bewegungsvorgänge im Raum, bei denen ausgezeichnete Punktbahnen auftreten, wurden vielfach, auch in jüngster Zeit, untersucht: Man denke nur an die nach *A. Mannheim* bzw. *G. Darboux* benannten Zwanglaufbewegungen, bei denen sämtliche Punkte einer starr bewegten Geraden bzw. eines Körpers ebene Bahnkurven durchlaufen. (Vgl. hierzu die historischen Bemerkungen, Ergänzungen und Literaturangaben bei *H. Vogler* [1]!)

I.

In der Folge sollen hier räumliche Zwangläufe betrachtet werden, bei denen *alle Punkte einer bewegten Geraden Böschungslinien zum gleichen Neigungswinkel* α *gegen eine feste Richtung beschreiben.*

Eine Gerade g werde durch einen ihrer Punkte A und ihren normierten Richtungsvektor $\mathbf{r}$ erfaßt. Bei einem Zwanglauf beschreibt g eine Regelfläche T, für deren Punkte X gilt

$$\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}(t) + \lambda\,\mathbf{r}(t).$$

Die Bahnkurve des Punktes A mit $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ fungiert als Leitkurve, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ mit $\mathbf{r}^2 = 1$ gibt die Erzeugendenrichtungen von T an. Die auftretenden Funktionen (bezogen auf ein rechtwinkeliges Achsenkreuz $\{0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$) seien genügend oft stetig differenzierbar über dem gemeinsamen Definitionsbereich der reellen Veränderlichen t vorausgesetzt. Bei Variieren von t werden für festes λ jeweils die Bahnkurven der Punkte X von g erhalten. Als feste Richtung, gegen die sämtliche Bahnen unter dem Winkel α geneigt seien, werde der Vektor $\mathbf{e}_3$ zugrundegelegt. Man erreicht noch Vereinfachungen, wenn man t als Bogenlänge der Leitkurve, also $\dot{\mathbf{a}}^2 = 1$ wählt. Mit den Darstellungen

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3$$

ist somit der Bedingung $\cos\alpha\,\sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2} = \mathbf{e}_3\,\dot{\mathbf{x}}$ oder ausführlich

$$(1) \qquad \cos^2\alpha\left[1 + 2\lambda\,(\dot{a}_1\dot{r}_1 + \dot{a}_2\dot{r}_2 + \dot{a}_3\dot{r}_3) + \lambda^2\,(\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2 + \dot{r}_3^2)\right] = (\dot{a}_3 + \lambda\,\dot{r}_3)^2$$

zu genügen. Dies ist eine quadratische Gleichung in λ, daher gilt:

(i) In jedem Augenblick t eines räumlichen Zwanglaufs gibt es im allgemeinen auf jeder bewegten Geraden g zwei Punkte, deren Bahnen mit der festen Richtung $\mathbf{e}_3$ gerade den Winkel α einschließen. Gibt es drei solche Punkte auf g, so gilt (1) identisch in λ und alle Punkte von g beschreiben Bahnkurven, deren Tangenten zum Zeitpunkt t mit $\mathbf{e}_3$ ebenfalls den Winkel α bilden.

(ii) Sind mindestens drei der Bahnkurven der Punkte von g Böschungslinien, gilt also (1) nicht nur lokal, sondern für alle Werte t, so verschwinden alle Koeffizienten der quadratischen Gleichung (1) identisch in t: Alle Punkte der Geraden g durchlaufen Böschungslinien. Die Bedingungen hierfür lauten (Koeffizientenvergleich):

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \dot{a}_3^2 \\ \cos^2\alpha\,(\dot{a}_1\dot{r}_1+\dot{a}_2\dot{r}_2+\dot{a}_3\dot{r}_3) &= \dot{a}_3\dot{r}_3 \\ \cos^2\alpha\,(\dot{r}_1^2+\dot{r}_2^2+\dot{r}_3^2) &= \dot{r}_3^2 \end{aligned}\right.$$

Wegen $\dot{\mathbf{a}}^2=1$ gelangen wir sofort zu

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned} \dot{a}_1^2+\dot{a}_2^2 &= \sin^2\alpha \\ \cos\alpha\,(\dot{a}_1\dot{r}_1+\dot{a}_2\dot{r}_2) &= \dot{r}_3\sin^2\alpha \\ \dot{r}_1^2+\dot{r}_2^2 &= \dot{r}_3^2\,\mathrm{tg}^2\alpha. \end{aligned}\right.$$

(2′) legt den Ansatz

$$(3)\qquad \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \dot{a}_1\mathbf{e}_1+\dot{a}_2\mathbf{e}_2+\dot{a}_3\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\sin\alpha\cos\varphi+\mathbf{e}_2\sin\alpha\sin\varphi+\mathbf{e}_3\cos\alpha \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}_1\mathbf{e}_1+\dot{r}_2\mathbf{e}_2+\dot{r}_3\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1 f\cos\varphi+\mathbf{e}_2 f\sin\varphi+\mathbf{e}_3 f\,\mathrm{ctg}\,\alpha \end{aligned}$$

mit geeigneten Funktionen $\varphi=\varphi(t)$, $f=f(t)$ nahe. Man findet hiermit

$$\begin{aligned} \dot{r}_1\sin\varphi-\dot{r}_2\cos\varphi &= 0 \\ \dot{r}_1\cos\varphi+\dot{r}_2\sin\varphi &= f, \end{aligned}$$

sowie

$$(4)\qquad \dot{\mathbf{r}}=\frac{f}{\sin\alpha}\,\dot{\mathbf{a}}.$$

Wegen $(\dot{\mathbf{a}}\,\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}})=0$ ist die von g beschriebene Regelfläche T eine *Torse*. Ihre Gratlinie wird für

$$\lambda=\lambda^*=-\frac{1}{\dot{\mathbf{a}}\,\dot{\mathbf{r}}}=-\frac{\sin\alpha}{f}$$

erhalten. Die Normierung $\mathbf{r}^2=1$ führt zu $\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{r}}=0$, $\mathbf{r}\,\dot{\mathbf{a}}=0$. Die Leitkurve durchsetzt daher die Erzeugende g der Torse rechtwinkelig. Gleiches gilt wegen (4) und somit

$$\dot{\mathbf{x}}=\dot{\mathbf{a}}+\lambda\,\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{a}}\,(1+\lambda\frac{f}{\sin\alpha})$$

auch für sämtliche Bahnkurven der Punkte von g, ausgenommen den Berührungspunkt X* von g mit der Gratlinie, d.h. für $\lambda\neq\lambda^*$. Da g ein Feld von geodätischen Linien auf T durchläuft, sind nach einem Satz von *C. F. Gauss* aus dem Jahre 1828 die Bahnkurven der Punkte von g geodätische Parallelkurven auf T. Sie sind somit *Evolventen der Gratlinie.*

Mittels (3) kann in üblicher Weise die *Krümmung* $\varkappa_\lambda$ und die *Torsion* τ_λ der Bahnkurven zum Parameterwert λ berechnet werden:

$$\varkappa_\lambda = \frac{\dot\varphi \sin\alpha}{1+\lambda \dfrac{f}{\sin\alpha}}, \qquad \tau_\lambda = \frac{\dot\varphi \cos\alpha}{1+\lambda \dfrac{f}{\sin\alpha}}.$$

Für die Leitlinie ($\lambda=0$) findet man im besonderen $\varkappa_0=\dot\varphi \sin\alpha$, $\tau_0=\dot\varphi\cos\alpha$. Hierdurch sind auch geometrische Deutungen des Winkels φ vorgenommen; ein einfacher Zusammenhang mit dem *Drehvektor* $\mathbf{d}$ von *G. Darboux* für die Leitkurve besteht ebenfalls: $\mathbf{d}=\dot\varphi\mathbf{e}_3$. Die Gratlinie von T mit der Darstellung

$$\text{(5)} \qquad \mathbf{x}^* = \mathbf{a} - \mathbf{r}\,\frac{\sin\alpha}{f}$$

weist eine charakteristische Eigenschaft auf: Wir ermitteln erst im Punkt X* den Einheitsvektor $\mathbf{h}^*$ in Richtung der Hauptnormalen[1]). Mit

$$v = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^{*2}} = \frac{\dot f \sin\alpha}{f^2}$$

und

$$\mathbf{x}^{*\prime\prime} = \frac{1}{v^3}\,(v\,\ddot{\mathbf{x}}^* - \dot v\,\dot{\mathbf{x}}^*)$$

gelangen wir zu

$$\mathbf{h}^* = \frac{1}{\varkappa^*}\,\mathbf{x}^{*\prime\prime} = \dot{\mathbf{r}}\,\frac{\sin\alpha}{f}.$$

Somit gilt wegen (3) $\mathbf{h}^*\,\mathbf{e}_3 = \cos\alpha$.

Die Hauptnormalen der Gratlinie der Torse T sind unter dem Winkel α gegen die Richtung $\mathbf{e}_3$ geneigt.

Daß diese Eigenschaft für die Torsen T unserer Fragestellung kennzeichnend ist, kann man sofort einsehen, wenn man von einer auf ihre Bogenlänge s bezogenen Raumkurve $\mathbf{y}=\mathbf{y}(s)$ ausgeht, ihre Tangentenfläche betrachtet und auf dieser die Schar der Evolventen:

$$\mathbf{z} = \mathbf{y}(s) - (s+s_0)\,\mathbf{t} \text{ mit } s_0 = \text{konst.}$$

Hierbei wurde der Tangenteneinheitsvektor $\mathbf{y}' = \mathbf{t}$ gesetzt. Die Tangentenrichtung der Evolvente ist durch

$$\mathbf{z}' = -\,\varkappa\,(s+s_0)\,\mathbf{h}$$

bestimmt. ($\mathbf{h}$ sei der Vektor der Hauptnormalen und $\varkappa$ die Krümmung der Ausgangskurve $\mathbf{y}(s)$.)

Allgemein gilt also: Die Tangenten einer Evolvente sind stets zu den Hauptnormalen der Evolute parallel. Die Aussagen: „Eine Raumkurve $\mathbf{y}$ besitzt konstant geneigte Hauptnormale $\mathbf{h}$“ und „Die Evolventen $\mathbf{z}$ der Kurve $\mathbf{y}$ auf ihrer Tangentenfläche sind Böschungslinien“ bedingen einander: $\mathbf{h}\,\mathbf{e} = \cos\alpha$.

[1]) Mit Strichen ($'$), ($''$) ... mögen im Folgenden die Ableitungen nach der Bogenlänge bezeichnet werden.

Zusammenfassend gilt somit der

Satz: *Wird eine Gerade g bei einer Zwanglaufbewegung so geführt, daß ihre sämtlichen Punkte Böschungslinien beschreiben, so durchwandert g die Erzeugenden-Schar einer Torse T, deren Gratlinie Ort der jeweiligen Ausnahmepunkte (Spitzen der Böschungslinien) ist. Die Bahnkurven der Punkte von g sind hierbei Evolventen der Gratlinie auf T, die selbst wiederum dadurch gekennzeichnet ist, unter dem Böschungswinkel α, also konstant geneigte Hauptnormalen zu besitzen.*

Für die Krümmung $\varkappa^*$ und die Torsion τ^* der Gratlinie finden wir[2]):

$$\varkappa^* = \frac{f^3}{\dot{f}\sin^2\alpha}, \qquad \tau^* = \frac{\dot{\varphi} f^2 \cos\alpha}{\dot{f}\sin^2\alpha} \cdot \int f\,dt.$$

Um eine *Integraldarstellung* unserer Problem-gemäß bewegten Geraden g und damit der Torse T zu erhalten, haben wir noch (3) zu intergrieren

$$(6)\qquad \begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{e}_1 \sin\alpha \int\cos\varphi\,dt + \mathbf{e}_2 \sin\alpha\int\sin\varphi\,dt + \mathbf{e}_3\, t\cos\alpha,\\ \mathbf{r} &= \mathbf{e}_1 \int f\cos\varphi\,dt + \mathbf{e}_2\int f\sin\varphi\,dt + \mathbf{e}_3 \operatorname{ctg}\alpha \int f\,dt. \end{aligned}$$

Der Richtungsvektor $\mathbf{r}$ muß noch die Normierungsbedingung erfüllen:

$$(7)\qquad \mathbf{r}^2 = \left(\int f\cos\varphi\,dt\right)^2 + \left(\int f\sin\varphi\,dt\right)^2 + \operatorname{ctg}^2\alpha\left(\int f\,dt\right)^2 = 1.$$

Dies liefert eine Beziehung zwischen den beiden Funktionen f(t) und φ(t). Durch zweimaliges Differenzieren nach der Veränderlichen t und anschließender Elimination von cos φ und sin φ erhält man

$$(8)\qquad \dot{\varphi} = \frac{f}{\sqrt{\sin^4\alpha - \cos^2\alpha\left(\int f\,dt\right)^2}}.$$

Durch weitgehend freie Wahl der Funktion f(t) kann also auf $\dot{\varphi}$ und durch nochmalige Integration auf φ geschlossen werden, womit eine Darstellung der bewegten Geraden gefunden ist.

Ein einfaches *Beispiel*, bei dem alle Integrationen elementar ausführbar sind, liefert die Funktion

$$f = \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha \cos t.$$

Führen wir zur Abkürzung $c = 1/\cos\alpha$ ein, so erhält man $\dot{\varphi} = c$ und $\varphi = c\,t$, sowie

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{e}_1 \sin\alpha\cos\alpha\sin ct - \mathbf{e}_2 \sin\alpha\cos\alpha\cos ct + \mathbf{e}_3\, t\cos\alpha,\\ \mathbf{r} &= \mathbf{e}_1 (\cos t\sin ct - \cos\alpha\sin t\cos ct) -\\ &\quad \mathbf{e}_2 (\cos t\cos ct + \cos\alpha\sin t\sin ct) + \mathbf{e}_3 \sin\alpha\sin t. \end{aligned}$$

[2]) Von der ersten Formel haben wir bereits früher Gebrauch gemacht.

Ferner erhalten wir

$$\varkappa_\lambda = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\lambda \operatorname{tg}\alpha \cos t}, \quad \tau_\lambda = \frac{1}{1+\lambda \operatorname{tg}\alpha \cos t},$$
$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* = {} & \mathbf{e}_1 \operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha\,(-\cos\alpha \sin ct + \operatorname{tg} t \cos ct) + \\ & \mathbf{e}_2 \operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha\,(\cos\alpha \cos ct + \operatorname{tg} t \sin ct) + \\ & \mathbf{e}_3 \cos\alpha\,(t - \operatorname{tg} t).\end{aligned}$$

II.

Wir fragen nun nach räumlichen Zwanglaufbewegungen, bei denen *alle Punkte einer starr bewegten Ebene* ε *Böschungslinien beschreiben.* Die Ebene ε sei durch einen ihrer Punkte A und zwei normierte, aufeinander senkrecht stehende Vektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ erfaßt. Zu einem beliebigen Punkt X von ε gehöre der Ortsvektor

$$\overrightarrow{OX} = \mathbf{x} = \mathbf{a}(t) + x_1\,\mathbf{r}_1(t) + x_2\,\mathbf{r}_2(t). \tag{9}$$

Der Punkt X ist fest in ε, d.h. starr mit dem Zweibein $\{A; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ verbunden, wenn seine Koordinaten x_1, x_2 in dem auf diesem Zweibein begründeten Koordinatensystem (Gangsystem) konstant sind. Durch $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ ist wiederum eine Leitkurve bestimmt, die – wie früher – auf ihre Bogenlänge t bezogen sei: $\dot{\mathbf{a}}^2 = 1$. Die angedeuteten Abhängigkeiten von t mögen wiederum die benötigten analytischen Voraussetzungen erfüllen.

Während bei der in I behandelten Fragestellung der räumliche Bewegungsvorgang noch nicht völlig bestimmt ist – Drehungen des Gangraums um die bewegte Gerade g bleiben noch offen –, wird durch (9) ein räumlicher Zwanglauf erfaßt. Der feste (ruhende) Raum (Rastraum) ist durch das Dreibein $\{0; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, der bewegte Raum (Gangraum) durch $\{A; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2\}$ repräsentiert. Die Forderung nach konstanter Neigung der Bahntangenten gegen die Richtung $\mathbf{e}_3$ wird durch $\cos\alpha \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^2} = \mathbf{e}_3\,\dot{\mathbf{x}}$ ausgedrückt. Stellen wir noch die Richtungsvektoren $\mathbf{r}_i$ im festen System durch

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_1\, r_{i1} + \mathbf{e}_2\, r_{i2} + \mathbf{e}_3\, r_{i3}, \quad (i = 1, 2)$$

dar, so gelangen wir zu einer quadratischen Gleichung in x_1, x_2:

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha\,\left[1 + 2\,x_1(\dot{\mathbf{a}}\,\dot{\mathbf{r}}_1) + 2\,x_2(\dot{\mathbf{a}}\,\dot{\mathbf{r}}_2) + x_1^2\,\dot{\mathbf{r}}_1^2 + 2\,x_1x_2(\dot{\mathbf{r}}_1\dot{\mathbf{r}}_2) + x_2^2\,\dot{\mathbf{r}}_2^2\right] = \\ = \left[\mathbf{e}_3 \cdot (\dot{\mathbf{a}} + x_1\dot{\mathbf{r}}_1 + x_2\dot{\mathbf{r}}_2)\right]^2.\end{aligned} \tag{10}$$

Daraus entnehmen wir ähnlich wie früher:

(i) In jedem Augenblick t eines räumlichen Bewegungsvorgangs gibt es im allgemeinen in jeder starr bewegten Ebene ε einen Kegelschnitt k, dessen Punkte Bahnen beschreiben, die mit der festen Richtung $\mathbf{e}_3$ geraden einen Winkel α einschließen. Existiert außerdem, d.h. nicht auf k liegend, noch mindestens ein Punkt in ε, dessen Bahn diese Eigenschaft besitzt, so gilt (10) identisch in den x_i, d.h. sämtliche Punkte von ε führen zu Bahnkurven, die zum Zeitpunkt t unter dem Winkel α gegen $\mathbf{e}_3$ geneigt sind.

(ii) Verschwinden alle Koeffizienten der quadratischen Gleichung (10) identisch in t, dann durchlaufen sämtliche Punkte von ε Böschungslinien.
Der Koeffizientenvergleich liefert (vgl. (2) und (2'))

$$(11)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha = \dot{a}_3^2 \\ \cos^2\alpha\,(\dot{a}_1\dot{r}_{i1} + \dot{a}_2\dot{r}_{i2} + \dot{a}_3\dot{r}_{i3}) = \dot{a}_3\dot{r}_{i3} \\ \cos^2\alpha\,(\dot{r}_{i1}^2 + \dot{r}_{i2}^2 + \dot{r}_{i3}^2) = \dot{r}_{i3}^2 \\ \cos^2\alpha\,(\dot{r}_{11}\dot{r}_{21} + \dot{r}_{12}\dot{r}_{22} + \dot{r}_{13}\dot{r}_{23}) = \dot{r}_{13}\dot{r}_{23}. \end{cases}$$

Entsprechende Umformungen, wie in I., führen zu dem Ansatz[3]):

$$(12)\quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{e}_1 \sin\alpha\cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\alpha\sin\varphi + \mathbf{e}_3\cos\alpha \\ \dot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{e}_1 f_i \cos\varphi + \mathbf{e}_2 f_i \sin\varphi + \mathbf{e}_3 f_i \operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}$$

mit geeignet zu wählenden Funktionen $\varphi=\varphi(t)$, $f_i=f_i(t)$. Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{r}_{i1}\sin\varphi - \dot{r}_{i2}\cos\varphi &= 0, \\ \dot{r}_{i1}\cos\varphi + \dot{r}_{i2}\sin\varphi &= f_i, \end{aligned}$$

sowie

$$(13)\quad \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{f_i}{\sin\alpha}\,\dot{\mathbf{a}}.$$

Die Normierungen $\mathbf{r}_i^2=1$ bewirken $\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{r}}_i=0$, $\mathbf{r}_i\dot{\mathbf{a}}=0$. Die Ebene ε wird bei der betrachteten Bewegung also so geführt, daß sie stets Normalebene der Leitkurve $\mathbf{a}(t)$ ist. Wegen

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{a}} + x_1\dot{\mathbf{r}}_1 + x_2\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{a}}\,(1 + x_1\frac{f_1}{\sin\alpha} + x_2\frac{f_2}{\sin\alpha})$$

sind alle Bahnkurven der Punkte X von ε *Parallelkurven.* Daraus folgt, daß bei unserem Bewegungsvorgang *die Ebene* ε *auf der von ihr umhüllten Torse* Φ *gleitungslos abrollt.*

Für *Krümmung* $\varkappa_X$ und *Torsion* τ_X der Bahnkurven finden wir

$$\varkappa_X = \frac{\dot{\varphi}\sin^2\alpha}{\sin\alpha + f_1x_1 + f_2x_2}, \qquad \tau_X = \frac{\dot{\varphi}\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + f_1x_1 + f_2x_2}.$$

$\varkappa_A = \dot{\varphi}\sin\alpha$, $\tau_A = \dot{\varphi}\cos\alpha$ sind wiederum die Invarianten der Leitlinie.

Eine Ausnahmerolle spielen die Punkte von ε, die zum Zeitpunkt t auf der (in ε veränderlichen) Geraden h mit der Gleichung

$$(14)\quad f_1x_1 + f_2x_2 + \sin\alpha = 0$$

(bezogen auf das Koordinatensystem $\{A;\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\}$) liegen. Auf die geometrische Bedeutung von h kommen wir noch zurück.

Die Ausnahmepunkte sind im allgemeinen Spitzen der Bahnkurven. Wählen wir in ε eine feste Gerade g, so wird sie nach I im Verlaufe des Bewegungsvorgangs die

[3]) Es zeigt sich, daß die vierte Bedingung in (11) aus den übrigen folgt.

Erzeugendenschar einer Torse T bilden. Der augenblickliche Gratpunkt liegt im Schnitt von g mit der jeweiligen Geraden h.

Nun betrachten wir die Torse Φ, die von der Ebene ε im Verlaufe unseres Zwanglaufs eingehüllt wird. Die Gleichung von ε lautet

$$(15)\qquad \dot{\mathbf{a}}\,(\mathbf{z}-\mathbf{a})=0.$$

Um zum Zeitpunkt t die Erzeugende und den Punkt Z auf der Gratlinie γ von Φ zu finden, differenzieren wir diese Gleichung (15) ein- bzw. zweimal nach t und berücksichtigen noch $\dot{\mathbf{a}}\,\ddot{\mathbf{a}}=0$:

$$(16)\qquad \ddot{\mathbf{a}}\,\mathbf{z}-1-\mathbf{a}\,\ddot{\mathbf{a}}=0,$$
$$(17)\qquad \dddot{\mathbf{a}}\,\mathbf{z}-\mathbf{a}\,\dddot{\mathbf{a}}=0.$$

Setzen wir für $\mathbf{z}$ die Darstellung (9) ein, so ist (15) bereits Rechnung getragen. (16) führt wieder auf die Gleichung (14). Die Gerade h ist somit die augenblickliche Erzeugende der Torse Φ (dargestellt im Gangsystem).

Die linearen Bedingungsgleichungen (15), (16), (17) sind eindeutig lösbar, wenn $(\dot{\mathbf{a}}\,\ddot{\mathbf{a}}\,\dddot{\mathbf{a}})\neq 0$, d.h. Krümmung und Torsion der Leitkurve nicht verschwinden ($\dot{\varphi}\neq 0$). Da (17) auf

$$(18)\qquad \dot{f}_1 z_1+\dot{f}_2 z_2=0$$

führt, ergibt sich für den augenblicklichen Gratpunkt Z mittels (14)

$$(19)\qquad z_1=\frac{\dot{f}_2\sin\alpha}{\dot{f}_1 f_2-f_1\dot{f}_2},\qquad z_2=\frac{-\dot{f}_1\sin\alpha}{\dot{f}_1 f_2-f_1\dot{f}_2}.$$

Der Ortsvektor

$$\overrightarrow{OZ}=\mathbf{z}=\mathbf{a}+z_1\mathbf{r}_1+z_2\mathbf{r}_2$$

führt bei Variieren von t zu den Punkten Z der Gratlinie γ von Φ. In der Ebene ε durchläuft Z eine Kurve ζ, die wegen (14) und (18) auch als Einhüllende der verschiedenen Lagen der Geraden h in ε aufzufassen ist. Die (räumliche) Gratlinie γ und die (ebene) Kurve ζ berühren sich im augenblicklichen Gratpunkt Z.

Wie schon hervorgehoben, entsteht unser Bewegungsvorgang auch durch das Abrollen von ε auf Φ. Für diesen Rollvorgang bestehen die Gratlinie γ, wie auch die Kurve ζ in ε aus Ausnahmepunkten. Wir wollen zeigen, daß die Kurven γ und ζ durch gleiche Bogenlängen aufeinander bezogen sind. Wir berechnen hierzu die Bogenelemente ds der Gratlinie γ und $d\sigma$ der ebenen Kurven ζ. Mittels (13) erhalten wir

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\dot{\mathbf{z}}^2=\frac{1}{\sin^2\alpha}\,(f_1 z_1+f_2 z_2+\sin\alpha)^2+\dot{z}_1^2+\dot{z}_2^2.$$

Da aber

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2=\dot{z}_1^2+\dot{z}_2^2$$

und Bedingung (14) erfüllt ist, stellen wir $ds=d\sigma$ fest. Zusammenfassend gilt der

Satz: *Wird eine Ebene ε bei einer Zwanglaufbewegung so geführt, daß ihre sämtlichen Punkte Böschungslinien beschreiben, so hüllt sie hierbei eine Torse Φ ein, wobei sie auf Φ gleitungslos abrollt. Die Böschungslinien sind Parallelkurven und erscheinen als Planevolventen von Φ. Die augenblickliche Erzeugende* h *von Φ ist der jeweilige Ort der Ausnahmepunkte (im allgemeinen Spitzen der Bahnkurven).* h *hüllt in ε eine Kurve ζ ein, den Ort der Punkte von ε, die der Reihe nach Gratpunkte von Φ werden. Beim Abrollen von ε auf Φ rollt diese Kurve ζ selbst wieder gleitungslos auf der Gratlinie γ ab.*

Die von uns in (12) eingeführten Funktionen $\varphi(t), f_1(t), f_2(t)$ sind nicht unabhängig voneinander wählbar. Aus (8) übernehmen wir einmal unmittelbar die Beziehungen

$$\dot{\varphi} = \frac{f_i}{\sqrt{\sin^4\alpha - \cos^2\alpha\,(\int f_i dt)^2}} \quad (i = 1, 2)$$

Aus $\mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{r}_1$ und Vergleich mit (12) folgern wir

$$(20) \qquad f_2 = \dot{\varphi} \cos\alpha \int f_1 dt,$$

ebenso $f_1 = -\dot{\varphi} \cos\alpha \int f_2 dt$

und daraus schließlich durch Differenzieren, kombinierende Umformungen, bei denen die Integrale eliminiert werden, und anschließendem Integrieren

$$f_1^2 + f_2^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^4\alpha,$$
$$\left(\int f_1 dt\right)^2 + \left(\int f_2 dt\right)^2 = \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Durch die weitgehend freie Wahl der Funktion $f_1(t)$ kann also auf $\varphi(t)$ und $f_2(t)$ geschlossen werden. Damit können wir einen Bewegungsvorgang der gewünschten Art konstruieren und für ihn eine *Integraldarstellung* geben. (Vgl. (6) in Teil I.!)

Die naheliegende Frage nach einparametrigen Bewegungsvorgängen, bei denen sämtliche Punkte des (dreidimensionalen) Gangraumes Böschungslinien beschreiben, ist negativ zu beantworten. Solche Bewegungen kann es nicht geben, denn einerseits müßte $\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{r}_3$ sein, andererseits würde man $\dot{\mathbf{a}}\,\mathbf{r}_3 = 0$ finden, was nicht möglich ist.

Wir erweitern nun das *Beispiel* aus I durch die Wahl von

$$f_1 = \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha \cos t$$

und der Abkürzung $c = 1/\cos\alpha$. Damit erhalten wir

$$f_2 = \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha \sin t.$$

und wie früher $\dot{\varphi} = c$, $\varphi = ct$. Damit gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{e}_1 \sin\alpha\cos\alpha\sin ct - \mathbf{e}_2 \sin\alpha\cos\alpha\cos ct + \mathbf{e}_3\, t\cos\alpha, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{e}_1 (\cos t \sin ct - \cos\alpha \sin t \cos ct) - \\ &\quad\ \mathbf{e}_2 (\cos t \cos ct + \cos\alpha \sin t \sin ct) + \mathbf{e}_3 \sin\alpha \sin t, \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_1 (\ \sin t \ \sin ct \ + \cos \alpha \cos t \ \cos ct) + \\ \mathbf{e}_2 (- \sin t \ \cos ct \ + \cos \alpha \cos t \ \sin ct) - \mathbf{e}_3 \sin \alpha \cos t.$$

Die Leitkurve ist eine gemeine Schraublinie, für ihre Parallelkurven, die Bahnkurven der Punkte X von ε gilt

$$\varkappa_x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha (x_1 \cos t + x_2 \sin t)}, \quad \tau_x = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha (x_1 \cos t + x_2 \sin t)}.$$

Als Gratlinie γ von Φ ergibt sich ebenfalls eine gemeine Schraublinie

$$z = \cos^2\alpha \operatorname{ctg} \alpha (- \mathbf{e}_1 \sin ct + \mathbf{e}_2 \cos ct) + \mathbf{e}_3 t \cos \alpha,$$

während in der bewegten Ebene die Kurve ζ ein Kreis ist:

$$z_1 = - \operatorname{ctg} \alpha \cos t, \; z_2 = - \operatorname{ctg} \alpha \sin t, \; z_1^2 + z_2^2 = \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Literaturverzeichnis

[1] HANS VOGLER: Räumliche Zwangläufe mit ebenen Bahnkurven. Berichte der Mathematisch-Statistischen Sektion im Forschungszentrum Graz: Bericht Nr. 162 (1981).

Die benützten Formeln aus der Theorie der Raumkurven und Regelflächen entnehme man etwa einem der folgenden Werke:

W. BLASCHKE – K. LEICHTWEISS: Elementare Differentialgeometrie, Springer 1973;
K. STRUBECKER: Differentialgeometrie I, II, III, Sammlung Göschen, Walter de Gruyter 1964–1969.